NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

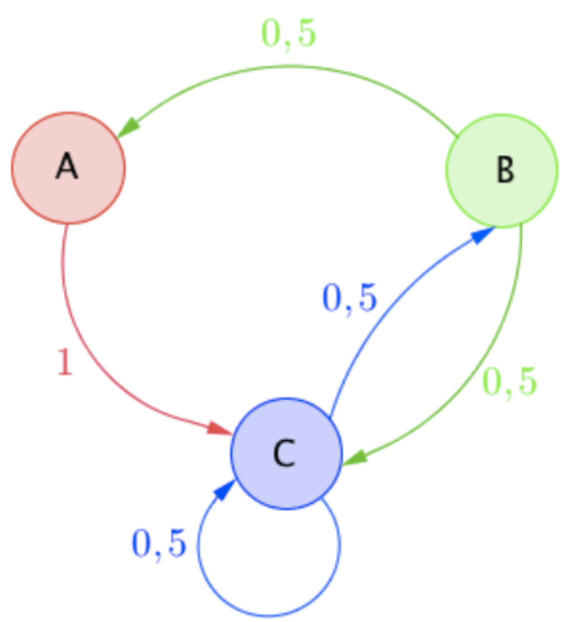
Travail de groupe n$^{\text{o}}$ 6

1 heure

	Exercice 1	Exercice 2-A	Exercice 2-B	Exercice 3	BONUS	Tenue du groupe
Total	4	7	4	6	2	1

Exercice 1

On considère la marche aléatoire sur le graphe ci-dessous où l'on part de A :



1. Donner la matrice de transition et la distribution initiale.
2. Justifier que la suite (π_n) des distributions converge vers un état stable que l'on déterminera.

Exercice 2

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier à ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.

Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n et B_n désignent respectivement les événements « l'ordinateur est sain au bout de n jour » et « l'ordinateur est défaillant au bout de n jour ».

a_n et b_n sont donc les probabilités respectives des événements A_n et B_n.

1.(a) Déterminer a_1 et b_1.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = DX_n + B$
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.
   (c) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
   (d) En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
   (e) Donner l'expression de D^n puis en déduire a_n et b_n en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

Partie B

Nous allons retrouver le résultat précédent en utilisant la théorie des chaînes de Markov.

On appelle A l'état « être sain » et B l'état « être défaillant »

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe probabiliste et définir la chaîne de Markov (X_n) qui va permettre de résoudre le problème.
2. Donner π_0, la matrice de transition T et en déduire π_n en fonction de n.
3. Justifier que la suite des distributions converge vers l'état stable que l'on calculera et conclure.

Exercice 3
On considère l'espace des états $E = \{1, 2\}$, et une matrice de transition $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. À quelles conditions sur $a,\ b,\ c$ et d la matrice P est-elle une matrice stochastique ?
2. Si P est une matrice stochastique, l'exprimer en fonction uniquement de a et d.
3. Dessiner le graphe probabiliste associé à P (plusieurs graphes sont à donner suivant les valeurs de a et d).
4. On suppose ici que $(a, d) \notin \{(0, 0); (1, 1)\}$.
   Déterminer l'état stable π en fonction de a et d.
5. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \pi_n = \pi + (a + d - 1)^n(\pi_0 - \pi) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\pi_0 = \begin{pmatrix} \pi_0^{(1)} & \pi_0^{(2} \end{pmatrix}$
   En déduire les expressions de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$ en fonction de $a,\ d,\ \pi_0^{(1)}$ et n.
6. En justifiant le fait que $|a + d - 1| < 1$, en déduire le comportement de cette chaîne de Markov lorsque n tend vers l'infini.

BONUS :

D'éminents sociologues rangent les individus de notre société en 3 classes sociales : Bourgeoisie, B, Classe moyenne, C et Prolétariat, P. On s'intéressera dans ce modèle simpliste à la classe sociale qu'atteint un individu à la fin de sa vie. On supposera que celle-ci dépend uniquement de la classe sociale de son père. Si le père appartient à B son fils appartiendra aux classes B et C avec des probabilités respectives de 0.5 et 0.5. Si le père appartient à C, son fils appartiendra aux classes B, C et P avec des probabilités respectives de 0.2, 0.7 et 0.1. Si le père appartient à P, son fils appartiendra aux classes B, C et P avec des probabilités respectives de 0.1, 0.3 et 0.6.

1. Modéliser ce comportement sociologique par une chaîne de Markov.
2. Donner son graphe et sa matrice de transition.
3. Quelles sont à long terme les proportions de chacune des classes ?
4. En déduire la probabilité à long terme d'être dans une classe sociale différente de celle de son grand-père paternel ?